

סיכומי הרצאות - חדו"א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

2	נוסחאות כלליות	1
2	חסמים עליונים ותחתונים	2
2	סדרות	3
2	3.1 הגדרת הגבול	
3	3.2 חשבון גבולות	
3	3.3 טענות על גבולות	
3	3.4 מבחן ה[שורש](מנה) [(הגבולי)?]	
4	3.5 סדרות מונוטוניות	
4	3.6 תתי סדרות	
4	3.6.1 גבולות חלקיים	
5	טורים	4
5	4.1 טור חיובי	
5	4.2 מבחן ה[השוואה](שורש)(מנה) [(הגבולי)?] לטורים חיוביים	
6	4.3 טור מתכנס בהחלט	
6	4.4 טורי חזקות	
7	4.5 טענות נוספות על טורים	
7	פונקציות	5
7	5.1 הגדרת הגבול	
7	5.2 חשבון גבולות (דומה לסדרות)	
8	5.3 גבולות שימושיים	
8	5.4 רציפות	
9	5.5 רציפות במ"ש (במידה שווה)	
9	5.6 נגזרת	
11	5.7 חקירת פונקציות	
11	5.7.1 מינימום ומקסימום מקומי	
11	5.7.2 עליה וירידה	
11	5.8 כלל לופיטל	
11	5.8.1 $\frac{0}{0}$	
11	5.8.2 $\frac{\infty}{\infty}$	
12	טורי טיילור	6
12	6.1 היי זה לא הזה ממבוא מורחב?	
12	6.2 באמת טורי טיילור אני מבטיח	

1 נוסחאות כלליות

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

בינום: $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$

א"ש הממוצעים: $(1+x)^n \geq 1+nx$ מתקיים $x > -1, n \in \mathbb{N}$ לכל

א"ש ברנולי: $|a+b| \leq |a| + |b|$

א"ש המשולש:

2 חסמים עליונים ותחתונים

M יקרא חסם מלעיל של A אם לכל $x \in A, x \leq M$
 M יקרא חסם מלרע של A אם לכל $x \in A, M \leq x$

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל קיים חסם עליון קטן ביותר, ונסמן אותו ב- $\sup A$.

טענה שימושית: אם $b = \sup A$ אז לכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש- $b - \varepsilon < a \leq b$.

הגדרה: נאמר ש- A צפופה ב- B אם לכל $b \in B$ ולכל $\varepsilon > 0$, קיים $a \in A$ כך ש- $|b - a| < \varepsilon$.

טענה: $S \subseteq \mathbb{R}$ צפופה ב- \mathbb{R} \iff לכל $a < b \in \mathbb{R}, (a, b) \cap S \neq \emptyset$.

טענה: לכל $a < b$, קיים q כך ש- $q \in (a, b)$.

הוכחה: נניח ש- $a > 0$. יהי k כך ש- $0 < \frac{1}{k} < b - a$. יהי m המספר הקטן ביותר כך ש- $\frac{m}{k} \geq b$. אז $\frac{m-1}{k} < b$. בנוסף, $a + \frac{1}{k} < a + (b - a) = b$ ולכן $a < \frac{m-1}{k}$. אם כך, $a < \frac{m-1}{k} < b$ וסיימנו. אם $a \leq 0$, נוסיף את $x = \lceil |a| + 17 \rceil$ ל- a, b ועבור $c = a + x, d = b + x$ קיים $q \in (a + x, b + x)$, ולכן $q - x \in (a, b)$ מש"ל.

טענה: \mathbb{Q} צפופה ב- \mathbb{R} ו- $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ צפופה ב- $[a, b]$.

3 סדרות

נסמן סדרות ב- (a_n) או $(a_n)_{n=1}^\infty$.

נאמר שסדרה חסומה מלעיל אם קיים M כך שלכל $n, a_n \leq M$.

נאמר שסדרה חסומה מלרע אם קיים M כך שלכל $n, M \leq a_n$.

נאמר שסדרה חסומה אם קיים M כך שלכל $n, |a_n| \leq M$.

3.1 הגדרת הגבול

נאמר שהגבול של (a_n) הוא L , ונסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ או $a_n \rightarrow L$, אם:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. |a_n - L| < \varepsilon$$

נאמר שהגבול של (a_n) הוא ∞ , ונסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ או $a_n \rightarrow \infty$, אם:

$$\forall M > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0. a_n > M$$

משפט (יחידות הגבול): אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L'$ אז $L = L'$.

סדרות קושי: זהו תנאי שקול להתכנסות, שלא צריך לדעת בשבילו את L :

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall m, n \geq n_0. |a_m - a_n| < \varepsilon$$

3.2 חשבון גבולות

יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות כך ש- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$. אזי:

- $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$
- אם $b \neq 0$ ו- $b_n \neq 0$ לכל n אז $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$
- אם $b = 0$ ו- $b_n \neq 0$ לכל n אז $\frac{1}{b_n} \rightarrow \infty$
- $|a_n| \rightarrow |a|$
- אם $a_n \geq 0$ לכל n אז $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$

3.3 טענות על גבולות

טענה: יהיו $(a_n) \rightarrow a, (b_n) \rightarrow b$ סדרות מתכנסות כך ש- $a_n \leq b_n$. אז: $a \leq b$.
כלל הסנדוויץ': יהיו x_n, y_n, z_n סדרות כך ש- $x_n \leq z_n \leq y_n$ (כמעט) לכל n . אם $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow x$, אז $z_n \rightarrow x$.

הרחבה: אם $x_n \geq y_n$ ו- $y_n \rightarrow \infty$ אז $x_n \rightarrow \infty$.

טענה: תהי (a_n) כך ש- $a_n \rightarrow L \neq 0$ ויהי $|L| < r < 0$. אז קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$, $|a_n| > r$.
משפט (שטולץ): יהיו a_n, b_n סדרות כך ש- b_n מונוטונית עולה ו- $b_n \rightarrow \infty$, או ש- a_n, b_n סדרות מונוטוניות מתכנסות ל-0.

אזי, אם $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ במובן הרחב אז $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

3.4 מבחן ה[שורש](מנה) (הגבולי)?

מבחן השורש: $a_n \geq 0$ וקיים $0 < \alpha < 1$ כך ש- $(a_n)^{1/n} \leq \alpha$ לכל n . אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
מבחן השורש הגבולי: $a_n > 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = L$. אזי,

• אם $L < 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

• אם $L > 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

משפט המנה הגבולי: $a_n > 0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. אזי,

• אם $L < 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

• אם $L > 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

משפט (דלאמבר): תהי (a_n) סדרה חיובית כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, סופי או אינסופי. אזי,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c$.

משפט המנה הכללי: $a_n > 0$

• אם קיים $L < 1$ כך שהחל ממוקום מסוים $a_{n+1} < La_n$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

• אם קיים $L > 1$ כך שהחל ממוקום מסוים $a_{n+1} > La_n$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

3.5 סדרות מונוטוניות

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. אזי: $a_n \rightarrow \sup a_n$.

טענה: תהי (a_n) מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל. אזי: $a_n \rightarrow \infty$.

3.6 תתי סדרות

תהי (a_n) סדרה ו- (n_k) סדרה עולה ממש של טבעיים. אז $b_k = a_{n_k}$ תת סדרה של (a_n) ונסמן ב- $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$.

משפט הירושה: תהי (a_n) סדרה ו- (a_{n_k}) תת-סדרה.

- אם $a_n \rightarrow L$ אז $a_{n_k} \rightarrow L$
- אם a_n מונוטונית עולה אז a_{n_k} מונוטונית עולה
- אם a_n חסומה אז a_{n_k} חסומה

משפט בולצנו-ויירשטראס: לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת ומונוטונית. אם הסדרה לא חסומה יש תת-סדרה מונוטונית מתבדרת ל- $\pm\infty$.

3.6.1 גבולות חלקיים

הגדרה: L יקרא גבול חלקי אם קיימת $a_{n_k} \rightarrow L$. נסמן ב- $\hat{\mathcal{P}}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים, ונסמן ב- $\mathcal{P}(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים בלי $\pm\infty$.

בנוסף, נגדיר: $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n = \inf \hat{\mathcal{P}}(a_n)$, $\limsup a_n = \overline{\lim} a_n = \sup \hat{\mathcal{P}}(a_n)$.

הערה: על פי בולצנו-ויירשטראס, תמיד קיים גבול חלקי

טענה שימושית: תהי (a_n) חסומה. $L = \limsup a_n \iff$

1. לכל $\varepsilon > 0$, $a_n < L + \varepsilon$ כמעט תמיד (חוץ ממספר סופי של איברים)

2. לכל $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon < a_n$ תופעה שכיחה (באינסוף איברים)

טענה: L גבול חלקי של $(a_n) \iff$ לכל $\varepsilon > 0$, $\{n \mid |a_n - L| < \varepsilon\}$ אינסופית

טענה: (a_n) חסומה $\iff \limsup a_n, \liminf a_n$ קיימים והם גבולות חלקיים

טענה: (a_n) אינה חסומה מלעיל/מלרע $\iff -\infty/\infty$ גבול חלקי

טענה: (a_n) מתכנסת במובן הרחב \iff יש גבול חלקי יחיד

טענה: בסדרה חסומה, $\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n$

קבוצה סגורה: תהי $B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. נאמר ש- B קבוצה סגורה אם לכל סדרה $(x_n) \subseteq B$,

$$x_n \rightarrow x \implies x \in B$$

משפט: אם (a_n) חסומה אז $\mathcal{P}(a_n)$ קבוצה סגורה.

טורים 4

תהי (a_n) סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
הגדרה: נאמר ש- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס \iff סדרת הסכומים החלקיים s_n מתכנסת.

הערה: הטור הוא עצם נפרד מסדרת הסכומים החלקיים, אסור לבלבל ביניהם

הטור הגיאומטרי: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ עבור $|q| < 1$.

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס אז $a_n \rightarrow 0$.

קריטריון קושי להתכנסות טורים: $\forall \varepsilon > 0. \exists n_0. \forall m \geq n_0. \forall p \in \mathbb{N}. \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$

חשבון טורים:

• אם $\sum a_n = K, \sum b_n = L$ מתכנסים אז $\sum (a_n + b_n) = K + L$ מתכנס

• אם $\sum a_n = L, \alpha \in \mathbb{R}$ מתכנס אז $\sum \alpha a_n = \alpha L$ מתכנס

4.1 טור חיובי

נאמר ש- $\sum a_n$ טור חיובי אם $a_n \geq 0$ לכל n

משפט: טור חיובי מתכנס \iff s_n חסומה מלעיל

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז כל טור שמתקבל מסידור מחדש של האיברים בו גם מתכנס ולאותו הגבול.

4.2 מבחן ה[השוואה](שורש)(מנה) (הגבולי)? לטורים חיוביים

סימון: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים. אם החל ממקום מסוים, $a_n \geq b_n$, נסמן $\sum a_n \asymp \sum b_n$.
מבחן ההשוואה לטורים חיוביים: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים כך ש- $\sum a_n \asymp \sum b_n$. אז:

1. אם $\sum a_n$ מתכנס, $\sum b_n$ מתכנס

2. אם $\sum b_n$ מתבדר, $\sum a_n$ מתבדר

מבחן ההשוואה הגבולי לטורים חיוביים: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

1. אם $L = 0$, אז אם $\sum b_n$ מתכנס גם $\sum a_n$ מתכנס ואם $\sum a_n$ מתבדר אז גם $\sum b_n$ מתבדר

2. אם $L = \infty$, אז אם $\sum b_n$ מתבדר גם $\sum a_n$ מתבדר ואם $\sum a_n$ מתכנס אז גם $\sum b_n$ מתכנס

3. אם $L \in (0, \infty)$, אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

מבחן השורש לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי ויהי $0 < q < 1$.

אם החל ממקום מסוים, $\sqrt[q]{a_n} < q$, אז $\sum a_n$ מתכנס.

מבחן השורש הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

1. אם $\limsup \sqrt[q]{a_n} < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס

2. אם $\limsup \sqrt[q]{a_n} > 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש- $a_n > 0$ לכל n .

1. אם קיים $0 < q < 1$ כך שהחל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ אז הטור מתכנס
2. אם החל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אז הטור מתבדר

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש- $a_n > 0$ לכל n .

1. אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס
2. אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר

מבחן העיבוי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי כך ש- $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ (מונוטוני יורד חלש). אזי, $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

4.3 טור מתכנס בהחלט

נאמר ש- $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum |a_n|$ מתכנס. אם טור לא מתכנס בהחלט נאמר שהוא "מתכנס בתנאי"

טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum a_n$ מתכנס

טענה שימושית: נסמן $\bar{a}_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$, $\underline{a}_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$.

$$\begin{aligned} a_n \geq 0 & \quad \bar{a}_n = a_n & \quad \underline{a}_n = 0 \\ a_n \leq 0 & \quad \bar{a}_n = 0 & \quad \underline{a}_n = -a_n \end{aligned}$$

ומתקיים ש- $a_n = \bar{a}_n - \underline{a}_n$.

טענה: אם $\sum \bar{a}_n$, $\sum \underline{a}_n$ מתכנסים אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
טענה: אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum \bar{a}_n, \sum \underline{a}_n \rightarrow \infty$.

4.4 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum a_n x^n$ (או $\sum a_n (x - x_0)^n$, אבל פחות מתייחסים אליו).

טור חזקות בהכרח מתכנס באיזשהו x , למשל 0.

משפט Abel: לכל טור חזקות $\sum a_n x^n$ קיים "מספר" $R \in [0, \infty]$ (שנקרא רדיוס ההתכנסות) כך שלכל $x \in (-R, R)$ הטור מתכנס בהחלט, ול- $x < -R, x > R$ הטור מתבדר.

משפט Cauchy-Hadamard: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות, רדיוס ההתכנסות הוא: $R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$ (כאשר $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$).

הערה: משפט Abel לא מתייחס ל- $\pm R$, צריך לבדוק עבורם בנפרד

4.5 טענות נוספות על טורים

טענה (הכנסת סוגריים): יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ו- n_k סדרה עולה של אינדקסים. נסמן $A_1 = a_1 + \dots + a_{n_1}, A_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}, \dots$ אז הטור $\sum A_n$ מתכנס ולאותו הגבול.

טענה הפוכה: תהי (a_n) סדרה ו- n_k סדרה עולה של אינדקסים. אם כל האיברים בתוך כל סוגריים, $(a_j)_{n_k+1}^{n_{k+1}}$, בעלי אותו סימן אז הטענה ההפוכה נכונה - אם $\sum A_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

שימוש: בתנאים הנכונים, $\sum a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \dots$

משפט לייבניץ על טורים מתכנסים: תהי (a_n) סדרה אי-שלילית יורדת ל-0. אזי הטור $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

טענה: יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות. $\sum a_n b_n$ מתכנס אם אחד מהניסוחים הבאים מתקיים:

- תנאי Dirichlet:** $b_n \nearrow 0$ או $b_n \searrow 0$ ו- $|s_n^a| < M$
- תנאי Abel:** b_n מונוטונית וחסומה ו- $\sum a_n$ מתכנס

משפט Riemann: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אזי לכל $-\infty \leq s \leq \infty$ ניתן לסדר את איברי הטור כך שיתכנס ל- s או שאפילו לא יתכנס במובן הרחב.

5 פונקציות

5.1 הגדרת הגבול

בשביל $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ נדרוש ש- $f(x)$ מוגדרת בסביבה נקובה כלשהי.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}. f(x) - L < \varepsilon$	Cauchy
	לכל $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- I סביבה נקובה, אם $x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, x_0 + \delta). f(x) - L < \varepsilon$	Cauchy
	ו- $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- $x_0 < x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$	$\forall \varepsilon > 0. \exists M > 0. \forall x > M. f(x) - L < \varepsilon$	Cauchy
	אז $x_n \rightarrow \infty$ אז $f(x_n) \rightarrow L$	Heine
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, x_0 + \delta). f(x) < -M$	Cauchy
	ו- $(x_n) \subseteq I \setminus \{x_0\}$ ו- $x_0 < x_n \rightarrow x_0$ אז $f(x_n) \rightarrow -\infty$	Heine

5.2 חשבון גבולות (דומה לסדרות)

יהיו $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ אזי:

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$ •

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$ •

• אם $L_2 \neq 0$ (ואם קיימת סביבה נקובה בה $g(x) \neq 0$): $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

משפט (הרכבה): יהיו I, J קטעים פתוחים ו- $x_0 \in I, y_0 \in J$ תהינה $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow J \setminus \{y_0\}$ ו- $g : J \setminus \{y_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ אז: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L$ אם $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$ ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$

5.3 גבולות שימושיים

• פולינומים: בגלל ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$ (מחשבון גבולות).

• עבור $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^{1/x} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

5.4 רציפות

הגדרה: יהי I קטע פתוח ויהי $x_0 \in I$. תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. אז:

• נאמר ש- f רציפה ב- x_0 אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

• נאמר ש- f רציפה ב- I אם f רציפה בכל נקודה ב- I

חשבון רציפות (נובע מחשבון גבולות): יהי I קטע פתוח ו- $x_0 \in I$ (נכון גם לחד-צדדי), ויהיו $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות.

1. $f + g$ רציפה ב- x_0

2. $f \cdot g$ רציפה ב- x_0

3. אם $g(x) \neq 0$ בסביבת x_0 אז $\frac{f}{g}$ רציפה ב- x_0

משפט (הרכבה): יהיו $f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A$ כך ש- $B \subseteq f(A)$. אם f רציפה ב- x_0 ו- g רציפה ב- $g(x_0)$, אז $g \circ f$ רציפה ב- x_0 .

רציפה מימין/שמאל: תהי $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, אז f רציפה מימין ב- a $\iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

טענה: f רציפה ב- x_0 $\iff f$ רציפה מימין ומשמאל ב- x_0

מיון נקודות אי רציפות: תהי f מוגדרת ב- I ו- x_0 נקודה פנימית.

1. אם קיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ אבל $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, נאמר שיש ב- x_0 אי רציפות סליקה כי אפשר לסלק אותה עם החלפת ערך אחד.

2. אם קיימים $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ אבל $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ נאמר שיש נקודת אי-רציפות ממין ראשון.

3. אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ אינו קיים מכל סיבה אחרת, היא ממין שני.

משפט: תהי $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ עולה.

• אם f חסומה מלעיל: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup(f(a, b))$

• אם f אינה חסומה מלעיל ב- (a, b) : $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית חזק. אזי $f(I)$ קטע מוכלל ו- $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ רציפה.

טענה: תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית, I קטע פתוח ו- $x_0 \in I$. אזי קיימים וסופיים $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \gcd(p, q) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{פונקציית Riemann}$$

מתקיים ש- $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$ לכל x_0 , ולכן פונקציית רימן רציפה באי-רציונאלים ואינה רציפה ברציונאלים.

משפט ויירשטראס: תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. אזי: f חסומה ומשיגה את חסמיה (כלומר משיגה מינימום ומקסימום בקטע).

משפט ערך הביניים של קושי: תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ויהי $f(a) \leq t \leq f(b)$. אזי קיים $x \in [a, b]$ כך ש- $f(x) = t$.

מסקנה: אם $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה אז f קטע סגור.

קטע מוכלל: אם $x_1, x_2 \in I$ אז כל מספר ביניהם $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ גם ב- I .

משפט: אם $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ו- I קטע מוכלל אז $f(I)$ קטע מוכלל.

5.5 רציפות במ"ש (במידה שווה)

הגדרה: תהי $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, נאמר ש- f רציפה במידה שווה ב- A אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

משפט קנטור: תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אזי f רציפה במ"ש ב- $[a, b]$.

קטע פתוח: תהי $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אזי f רציפה במ"ש ב- (a, b) \iff קיים וסופי $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

משפט: אם $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה כך שקיים וסופי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ אז f רציפה במ"ש.

איחוד קטעים: אם f רציפה במ"ש ב- (a, b) , $[b, c)$, אז f רציפה במ"ש ב- (a, c) .

מסקנה: אפשר לעשות את כל הוריאציות של קטעים באמצעות איחוד קטעים - למשל, אם f רציפה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ קיימים וסופיים אז f רציפה במ"ש ב- (a, b) באמצעות איחוד הקטעים $(a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b)$.

טענה: פונקציה רציפה במ"ש בקטע פתוח היא חסומה.

שיטת הפרכה: למצוא שתי סדרות $(x_n), (y_n)$ כך ש- $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ אבל $|f(x_n) - f(y_n)| \not\rightarrow 0$.

5.6 נגזרת

תהי f מוגדרת בקטע פתוח I ו- $x_0 \in I$. אם קיים וסופי $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ אז קיים וסופי $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (הגדרות שקולות), נאמר ש- f גזירה ב- x_0 ונסמן את הגבול ב- $f'(x_0)$.

טענה: פונקציה גזירה ב- x_0 רציפה ב- x_0 .

משפט רול: תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) . אם $f(a) = f(b)$ אז קיים $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = 0$.

משפט Lagrange: תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) . קיימת $c \in (a, b)$ עבורה $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

משפט הערך הממוצע של קושי: יהיו $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות ב- $[a, b]$ וגזירות ב- (a, b) , ונניח ש- $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a, b)$. קיימת $c \in (a, b)$ עבורה $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

המשפטים האלה חזקים כי הם מקשרים בין הנגזרת לבין ערכים קונקרטיים של f .

משפט ערך הביניים של Darboux: יהי I קטע מוכלל ותהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה. יהיו $u, v \in I$ כך ש- $f'(u) \neq f'(v)$. אזי לכל c בין $f'(u)$ ל- $f'(v)$ קיים w בין u ל- v כך ש- $f'(w) = c$. כלומר, למרות שנגזרת לא בהכרח רציפה, היא עדיין תמיד מקיימת את משפט ערך הביניים.

גזירה n פעמים: אם $f, f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$ גזירות בסביבה של x_0 , ו- $f^{(n)}$ גזירה ב- x_0 . כלל לייבניץ: יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I$ ו- $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירות n פעמים ב- x_0 . אז:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)$$

שזו הכללה של הכלל $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$.

כלל השרשרת: תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ו- U סביבה של x_0 . תהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ב- x_0 ותהי $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f(U) \subseteq V$ גזירה ב- $y_0 = f(x_0)$. אזי $g(f(x_0))$ גזירה ומתקיים:

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

מדריך למהנדסים

$(\alpha f(x) + \beta g(x))'$	$\alpha f'(x) + \beta g'(x)$
$(f(g(x)))'$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))'$	$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$
$(x^n)'$	$n \cdot x^{n-1}$
$(\ln x)'$	$\frac{1}{x}$
$(\sin(x))'$	$\cos(x)$
$(\cos(x))'$	$-\sin(x)$

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהינה $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות ב- I וגזירות בפנימו. אם $f'(x) = g'(x)$ בפנימו אז קיים c כך שלכל x ,

$$f(x) = g(x) + c$$

משפט: תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) . כמו כן קיים וסופי $l = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. אזי f גזירה מימין ב- a ומתקיים: $f'_+(a) = l$.

דיפרנציאביליות: תהי f מוגדרת ב- I קטע פתוח ו- $x_0 \in I$. נאמר ש- f דיפרנציאבילית ב- x_0 אם:

$$1. f(x) \text{ רציפה ב-} x_0$$

$$2. \text{קיים ישר } ax + b \text{ שהוא קירוב ראשון ב-} x_0 \text{ (כלומר, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (ax + b)}{x - x_0} = 0 \text{)}$$

משפט: f דיפרנציאבילית ב- $x_0 \iff$ גזירה ב- x_0 . הקירוב הוא $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

משפט: יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I$ ו- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית חזק ורציפה.

אם f גזירה ב- x_0 אז $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ב- $y_0 = f(x_0)$ ו: $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$.

5.7 חקירת פונקציות

5.7.1 מינימום ומקסימום מקומי

הגדרה: $x_0 \in I$ פנימית מינימום מקומי אם לכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x) \geq f(x_0)$.
משפט Fermat: יהי I קטע מוכלל ותהי $x_0 \in I$ פנימית. תהי $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה בכל נקודה פנימית ב- I . אם x_0 מינימום/מקסימום מקומי אז $f'(x_0) = 0$.
משפט: יהי I קטע מוכלל, $x_0 \in I$ פנימית, f גזירה פעמיים ב- x_0 ו- $f'(x_0) = 0$. אזי, אם $f''(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי, אם $f''(x_0) < 0$ אז x_0 מקסימום מקומי, ואחרת לא ידוע.

5.7.2 עליה וירידה

משפט: יהי I קטע מוכלל, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה וגזירה בפנים I . אם לכל x בפנים I , $f'(x) \geq 0$ ($>$), אז f עולה (ממש) בכל I .
טענה: תהי $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ו- $x_0 \in I$ נקודה פנימית. אם f' רציפה ב- x_0 ו- $f'(x_0) > 0$ אז קיימת סביבה של x_0 בה f עולה ממש.

5.8 כלל לופיטל

5.8.1 $\frac{0}{0}$

יהיו f, g גזירות בסביבה מנוקבת I של x_0 כך שמתקיימים התנאים הבאים:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$3. g'(x) \neq 0 \text{ לכל } x \in I$$

$$4. \text{קיים } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (סופי או אינסופי)}$$

$$\text{אז } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5.8.2 $\frac{\infty}{\infty}$

יהיו f, g גזירות בסביבה מנוקבת I של x_0 כך שמתקיימים התנאים הבאים:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

$$2. g'(x) \neq 0 \text{ לכל } x \in I$$

$$3. \text{קיים } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (סופי או אינסופי)}$$

$$\text{אז } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6 טורי טיילור

6.1 היי זה לא הזה ממבוא מורחב?

(בניגוד לחלקים הקודמים אני לא במצב רוח לכתוב באופן יותר מדי פורמלי)

יהיו $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

אם $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ אז $f(x) = o(g(x))$

קיים $c > 0$ כך שבסביבה של x_0 , $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$ $f(x) = O(g(x))$

$f(x) = \Theta(g(x))$ $f(x) = O(g(x)) \wedge g(x) = O(f(x))$ (אין באמת שימושים ל- O עצמו)

6.2 באמת טורי טיילור אני מבטיח

הגדרה: יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I, f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. נאמר ש- f ו- g מזדהות עד סדר n ב- x_0 אם שתיהן גזירות n פעמים ב- x_0 ומתקיים $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ עבור $k = 1, \dots, n$.

טענה: אם f, g מזדהות עד סדר n ב- x_0 אז $f(x) - g(x) = o((x - x_0)^n)$.

הגדרה: יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה n פעמים ב- x_0 . נאמר ש- $p_n(x)$ פולינום טיילור של f ב- x_0 אם $p_n(x)$ מזדהה עם f ב- x_0 עד סדר n .

משפט: קיים ויחיד $p_n(x)$ והנוסחה היא:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

הגדרה: נגדיר את השארית להיות $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

משפט פאנו: $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

משפט טיילור עם שארית לגרנז': יהי I קטע פתוח, $x_0 \in I$, גזירה $n+1$ פעמים ב- I . אז לכל $x \in I, x \neq x_0$ קיים c_x בין x_0 ל- x כך ש:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

מסקנה: אם גזירה אינסוף פעמים ב- I וקיים $M(x)$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ ולכל y בין x ל- x_0 , $|f^{(k)}(y)| < M(x)$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

לפי טיעון כזה מוכיחים שהשארית שואפת ל-0 ב- e^x , ולכן בעצם $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, ואפשר אפילו להעריך את השגיאה.