סיכומי הרצאות - חדו"א 1א

מיכאל פרבר ברודסקי

תוכן עניינים

1 אינטגרל רימן

הגדרה: יהי $[a,b]$ קטע סגור. קבוצה סופית של נקודות $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ תקרא **חלוקה** של $[a,b]$ אם:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

לקטע $[x_{i-1},x_i]$ קוראים **תת הקטע ה־i**.

הגדרה: $\lambda(\Pi)=\max_{i=1,\ldots,n}(x_i-x_{i-1})$ העדינות של החלוקה.

הגדרה: יהיו Π_1,Π_2 חלוקות של $[a,b]$. נאמר ש־Π_2 **עידון של** Π_1 אם: $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ (ובפרט גם $\lambda(\Pi_1)\geq\lambda(\Pi_2)$).

הגדרה: תהי $\Pi=\{x_0<\ldots<x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$. נאמר ש־$\{t_1,\ldots,t_n\}$ נקודות **מתאימות לחלוקה** אם: $t_i\in[x_{i-1},x_i]$.

סכום רימן: יהיו $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\Pi=\{x_0<\ldots<x_n\}$ ו־$t_1,\ldots,t_n$ מתאימות ל־Π. נגדיר:

$$S\left(f,\Pi,\{t_i\}_{i=1}^{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\overbrace{\Delta x_i}^{x_i-x_{i-1}}\cdot f(t_i)$$

פונקציה אינטגרבילית רימן: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. נאמר ש־f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$ עם אינטגרל השווה ל־$I\in\mathbb{R}$ אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה Π של $[a,b]$ עם $\lambda(\Pi)<\delta$ ולכל בחירה של נקודות מתאימות $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ יתקיים:

$$\left|S\left(f,\Pi,\{t_i\}_{i=1}^{n}\right)-I\right|<\delta$$

ונסמן $f\in R[a,b]$ ו־$I=\int_a^b f$.

2 אינטגרל לא מסוים

תהי $f:I\to\mathbb{R}$. F תקרא **קדומה** של f ב־I אם לכל $x\in I$, $F'(x)=f(x)$ (ובקצה השמאלי $F'_+(x)=f(x)$ ובקצה הימני $F'_-(x)=f(x)$)

האינטגרל הלא מסוים של f ב־I הוא אוסף כל הקדומות שלו ומסומן ב:

$$\int f=\int f dx=\{F:I\to\mathbb{R}\mid F'=f\}$$

טענה: אם F_1,F_2 קדומות של f אז $F_1=F_2+C$. לכן נרשום: $\int f=F+C$.

טענה: אם ל־f אין את תכונת ערך הביניים אז אין לה פונקציה קדומה (כי אחרת היא הייתה מקיימת את תכונת דרבו).

משפט: אם f רציפה ב־I אז יש לה קדומה ב־I.

2.1 שיטות אינטגרציה

אינטגרלים בסיסיים

$\int x^{\alpha},\alpha\neq-1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
$\int\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+C$
$\int\ln(x)$	$x\ln(x)-x+C$
$\int\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)+C$
$\int\sin(x)$	$-\cos(x)+C$

אינטגרציה בחלקים: יהיו $u,v:I\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות. אזי:

$$\int uv'=uv-\int u'v$$

החלפת משתנים: תהי f בעלת קדומה $F\left(t\right)=\int f\left(t\right)dt$. עבור פונקציה $g\left(x\right)$ גזירה מתקיים:

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx=F\left(g\left(x\right)\right)$$

כלומר אם $t=g\left(x\right)$ אז:

$$\int f\left(t\right)dt=\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx$$